УДК 517.911.5

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **И.А. Финогенко**

Ключевые слова: предельное дифференциальное включение; неавтономная система; полуиваринтное множество; функция Ляпунова; принцип инвариантности.

Для неавтономных дифференциальных включений вводится понятие предельных дифференциальных включений, изучаются их свойства, исследуются свойства типа инвариантности ω-предельных множеств решений и устанавливается аналог принципа инвариантности Ла-Салля с использованием функций Ляпунова со знакопостоянной производной. Метод исследований в равной степени может применяться для дифференциальных уравнений и при соответствующих предположениях приводит к известным результатам.

Выводы, которые можно сделать при исследовании систем дифференциальных уравнений $\dot{x}=f(x)$ с использованием функций Ляпунова $V(x)$ со знакопостоянными производными, содержатся в теореме Ла-Салля (см. [1, стр. 190]), известной как принцип инвариантности: для автономного дифференциального уравнения ω-предельное множество решения принадлежит объединению всех непродолжимых орбит, каждая из которых представляет подмножество множества $E(\dot{V}=0)\stackrel{\Delta}{=}\{x:\dot{V}(x)=0\}$ нулей производной функции Ляпунова $V(x)$. Доказательство этой теоремы существенным образом опирается на свойство полуинвариантности ω-предельных множеств автономных систем. Для неавтономных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с тем, что ω-предельные множества не обладают какими-либо свойствами инвариантности относительно исходных уравнений. Кроме этого, возникает вопрос о том, что понимать под множеством $E(\dot{V}=0)$, т. к. производная $\dot{V}$ зависит не только от переменной x, но от t.

Попытки преодолеть эти трудности и перенести принцип инвариантности на неавтономные уравнения
$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1}$$
привели к понятиям предельных уравнений, порождаемых сдвигами $f^{\tau}(t,x)=f(t+\tau,x)$ функции $f:R^1\times R^n\to R^n$. Пусть $\Lambda^+(x)$ – ω-предельное множество ограниченного решения $x(t)$ уравнения (1) и $x(t_k)\to y_0\in\Lambda^+(x)$ при $t_k\to+\infty$. Тогда функции $y_k(t)=x(t+t_k)$, $t\geqslant 0$, являются решениями уравнений $\dot{y}_k(t)=f(t+t_k,y_k(t))$ и возникает вопрос об уравнении, которому удовлетворяет предельная функция $y(t)$ при $t_k\to+\infty$. Очевидно, что $y(t)\in\Lambda(x)$ и поэтому ответ на этот вопрос дает некоторое свойство типа инвариантности множества $\Lambda^+(x)$. При условии равномерной непрерывности и ограниченности функции $f(t,x)$ на каждом множестве вида $[\alpha,+\infty)\times K$, где $K\subset R^n$ — компактное множество, существует подпоследовательность $\{t_{k_i}\}$, такая, что $f^{t_{k_i}}(t,x)\to f'(t,x)$. Предельное уравнение определяется в виде: $\dot{x}=f'(t,x)$ и функция $y(t)$ является его решением. Теперь, если $V(t,x)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенству $\dot{V}(t,x)\leqslant w(t,x)\leqslant 0$ в силу уравнения (1), то некоторый аналог принципа инвариантности для неавтономного уравнения (1) может быть установлен в терминах т. н. предельной пары (f',w').

Еще один путь исследований состоит в том, что предельная функция $f'(t,x)$ определяется из условия
$$\lim_{t_k\to+\infty}\int_a^t f^{t_k}(s,x)ds=\int_a^t f'(s,x)ds \tag{2}$$

для любого фиксированного $t > a0$. Здесь функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. В этом случае предельные уравнения могут записыватся в операторном виде (Artstein Z. J. Differ. Equations, 1977–1978)

В данной работе предельные отображения построены на формуле (Davy J.L. Bull. Austral. Math. Soc. 1972):

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n\geqslant 1}\overline{co}\cup_{k\geqslant n}\dot{y}_k(t) \tag{3}$$

для п. в. $t\in I$, справедливой для предела $y(t)$ последовательности абсолютно непрерывных функций $y_k : I \to R^n$. (Здесь $\overline{co}$ — символ выпуклой замкнутой оболочки множества.)

Для многозначного отображения $F : R^1 \times R^n \to R^n$ с выпуклыми компактными значениями с помощью многозначного оператора сдвига $F(t+\tau,x)$ мы вводим два типа многозначных отображений, структура которых определяется в соответствии с формулой (3), а именно:

$$F'(t,x) = \cap_{n\geqslant 1}\overline{co}\cup_{k\geqslant n}F(t+t_k,x),\ F^*(t,x) = \cap_{b\geqslant 0}\overline{co}\cup_{\tau>b}F(t+t_k,x). \tag{4}$$

Мы устанавливаем, что при некоторых условиях предел $y(t)$ последовательность функций $y_k(t) = x(t+t_k)$, где $x(t)$ — решение включения

$$\dot{x} \in F(t,x), \tag{5}$$

является решением дифференциальных включений

$$\dot{x} \in F'(t,x),\ \dot{x} \in F^*(t,x). \tag{6}$$

Многозначные отображения $F'(t,x)$ и $F^*(t,x)$ называются предельными для многозначного отображения $F(t,x)$, а включения (6) — предельными дифференциальными включениями. При этом оказывается, что отображение $F(t,x)$ не зависит от переменной t и таким образом второе включение (6) автономно.

Отметим, что если $F(t,x) = f(t,x)$ — однозначное отображение, то отображения $F'(t,x)$ и $F^*(t,x)$ в общем случае многозначны. Но при этом:

1. Если последовательность $f^{t_k}(t,x)$ сходится поточечно, то предельное отображение совпадает с $F'(t,x)$, а если существует предел $\lim_{t\to+\infty} f(t,x)$, то он совпадает с $F^*(x)$.

2. Если последовательность сдвигов $f^{t_k}(\cdot,x)$ ограничена в пространстве $L_1(I,R^n)$ при каждом фиксированном x, то для предельной функции $f'(t,x)$, определенной равенством (2), выполняется $f'(t,x) \in F'(t,x)$ для п. в. $t \in [0,+\infty)$ при любом фиксированном x.

Таким образом, предлагаемый подход обобщает упомянутые выше методы исследования неавтономных дифференциальных уравнений (1).

В данной работе мы исследуем свойства предельных отображений (4), в терминах дифференциальных включений (6) устанавливаем свойства типа инвариантности для ω-предельных множеств включения (5) и с использованием функций Ляпунова со знакопостоянной производной доказываем для него аналог принципа инвариантности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований № 17 Президиума РАН, СО РАН (междисциплинарный проект № 80) и ФЦП Министерства образования и науки РФ (прект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011).

Finogenko I.A. PRINCIPLE OF INVARIANCY FOR NONAUTONOMOUS DIFFERENTIAL INCLUSIONS

For nonautonomous differential inclusions the concept of limiting differential inclusions is entered, their properties are studied, properties such as invariancy ω-limiting sets of solutions are investigated and the analogue of the principle of invariancy LaSalle by use of Lyapunov's functions with constant signs a derivative is established. The method of researches equally can be applied to the differential equations and under corresponding assumptions leads to known results.

Key words: limiting differential inclusion; nonautonomous system; semiinvariant set; Lyapunov's function; a principle of invariancy.

УДК 517.977.5

О ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ С МОНОТОННОЙ ДИНАМИКОЙ

© **Д.В. Хлопин**

Ключевые слова: задача управления; задача на бесконечном промежутке; необходимые условия оптимальности; краевое условие на бесконечности; принцип максимума Понтрягина; монотонность.

В задачах управления на бесконечном промежутке для оптимального управления не существует удобного краевого условия на бесконечности, необходимого для его оптимальности. Задачи с монотонными по x правой частью и целевой функцией обычно более просты для исследования; работы последних лет показали, например, что удовлетворяющая соотношениям принципа максимума сопряженная переменная в таких задачах сохраняет знак. Для существенного класса таких задач удается предъявить для такой сопряженной переменной как краевое условие, так и конкретную формулу. В докладе предполагается обсудить возможность переноса этого условия на произвольные задачи с монотонной правой частью.

В задачах управления на бесконечном промежутке времени

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(0) = 0, \quad u \in U(t), \quad J[x,u](t) \overset{\triangle}{=} \int_0^T g(t,x,u)dt \overset{T\to\infty}{\rightsquigarrow} \max$$

принцип максимума Понтрягина (ПМП) является необходимым условием оптимальности, однако сам он не содержит (см. [1, § 6]) удобного условия на выбор сопряженной переменной.

Для оптимального процесса (u^0, x^0) рассмотрим набор краевых задач

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \ x_n(0) = \xi_n, \quad \dot{\psi}_n = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ \psi_n(\tau_n) = 0, \quad \lambda_n > 0, \lambda_n + ||\psi_n(0)|| = 1,$$

где $H = \psi f\big(t,x,u^0(t)\big) + \lambda g\big(t,x,u^0(t)\big)$. Дополнительным необходимым условием оптимальности является существование для некоторых $\xi_n \to 0, \tau_n \to \infty$ у решений этих задач предела (x^0, λ^0, ψ^0), удовлетворяющего условию максимума. Назовем эти пределы *исчезающими решениями* ПМП. Такое необходимое условие оптимальности впервые было выделено в [2, Theorem 9.1]; общий случай в [3, Theorem 2]. Его использование значительно упрощается, если найдется исчезающее решение со свойством $x_n \equiv x^0$, назовем его *строгим* [4].